

6 лекция

Жұмыс және энергия. Механикадағы энергияның сақталу заңы. Релятивистік механикадағы сақталу заңдары

6.1. Күш жұмысы. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы және оның жұмыспен байланысы

6.2. Потенциалды (консервативті) күштер. Өрістің потенциалдығының математикалық критерийі

6.3. Сыртқы күш өрісіндегі материялық нүктенің потенциалды энергиясы және оның күшпен байланысы. Механикадағы энергияның сақталу заңы. Потенциалды энергияны нормалау.

6.4. Толық энергия және тыныштық энергиясы. Кинетикалық энергия. Масса мен энергия арасындағы арақатынас. Бөлшектің толық энергиясының импульс арқылы бейнеленуі.

Жұмыс пен жылдамдық өзгерісінің арасындағы байланысты табайық. Әуелі күш X өсі бойымен әсер ететін және қозғалыс осы өс бойында болатын бірөлшемді жағдайда қарастырайық. Нүкте қозғалысының теңдеуін шеше отырып (бұл теңдеудің екі бөлімін де v_x -ке көбейтіп)

$$m_o \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad (66)$$

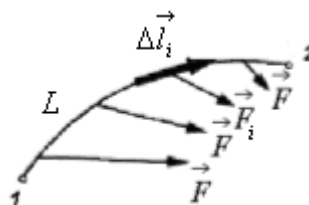
біржолата мынаны табамыз:

$$\frac{m_o v_{x2}^2}{2} - \frac{m_o v_{x1}^2}{2} = \int_{x1}^{x2} F_x dx, \quad (67)$$

мұндағы m_o – нүктенің массасы, ал $\frac{m_o v_x^2}{2}$ – **нүктенің кинетикалық энергиясы.**

Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының оның екі түрлі орналасуы арасындағы орын ауыстыруы кезіндегі өзгеруі осы жердегі күштің атқарған жұмысына тең.

Нүкте алғашқыдағыдай түзу бойымен емес ерікті траекториямен қозғалсын делік (7 сурет).



7 Сурет.

Қозғалыс траекториясын қысқа кесінділерге $\Delta \vec{l}_i$ бөлейік. Осы кесіндідегі элементарлық жұмыс:

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{l}_i = F_i \Delta l_i \cos(\vec{F}_i, \Delta \vec{l}_i). \quad (68)$$

Кесінділердің ұзындықтарын ($\Delta \vec{l}_i$) нөлге қарай, ал олардың санын – шексіздікке ұмталдыра отырып, ерікті траектория бойынша орын ауыстыру кезіндегі **күштің жұмысын** аламыз:

$$A = \lim_{\Delta \vec{l}_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{l}_i = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} . \quad (69)$$

Осы теңдеудің оң жақ бөлігіндегі интеграл – L сызығының бойымен, 1 және 2 нүктелердің арасында алынған – қисықсызықты интеграл деп аталады.

Енді қозғалыстың жалпы теңдеуін қарастырайық:

$$m_o \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} . \quad (70)$$

Бұл теңдеуді шеше отырып (теңдеудің екі бөлігін де $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ -ға көбейтіп) мынаны табамыз:

$$\frac{m_o v_2^2}{2} - \frac{m_o v_1^2}{2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} . \quad (71)$$

Көп жағдайда күштің қасиеттері соншалықты, тіпті (71)-дегі оң жақ бөлім (энергияның өлшемділігіне ие шама) механика аясында анық мәнге ие болады.

Потенциалды (консервативті) күштер. Күштерді олардың қасиеттері бойынша екі класқа бөлуге болады. Бірінші класс күштері үшін, екі нүкте арасында орын ауыстыру барысындағы жұмыс осы орын ауыстыру кезіндегі жүрілген жолға тәуелді емес, ал екінші класс күштері үшін – тәуелді.

Жұмысы траекторияның бастапқы және соңғы нүктелеріне тәуелді, бірақ оның түріне тәуелсіз болатын күштер потенциалды (консервативті) деп аталады. Бұл күштерге тартылыс күштері жатады.

"Потенциалды күштер" деген атаудың орнына көбінесе "потенциалды өрістер" делінеді. Күш өрісі деп нүктелерінде қарастырылып отырған күштер әрекет ететін кеңістік аясын айтады.

Потенциалды өріс дегеніміз, ондағы жұмыс, яғни интеграл:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (72)$$

1 және 2 нүктелердің орналасу орындарына ғана тәуелді болып, бірақ осы нүктелерді қосатын жолдың түріне тәуелсіз болса. Бұл анықтамаға басқаша математикалық пішін беруге де болады:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 , \quad (73)$$

және сөзбен анықтама формасында айтсақ: 1) өріс потенциалды деп айтылады, егер де өрістің күш жұмысы кез келген тұйық контур бойынша нөлге тең болса; және критерий формасында айтсақ: 2) өріс потенциалды болу үшін, өрістің күш жұмысы кез келген контур бойынша нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.

Енді әлдебір **математикалық теореманы** дәлелдеусіз түрде келтіре отырып пайдалансақ: егер F_x , F_y , F_z потенциалды күштің проекциялары болған болса онда мынадай функцияның $E_n(x, y, z)$ бар болғаны, және оның көмегінің арқасында осы проекциялар мынандай формулалармен бейнеленеді:

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}. \quad (74)$$

E_n функциясының көмегі арқылы (71) теңдіктің оң жақ бөлігіндегі күштің жұмысын есептеп шығаруға болады. Ол үшін бірінші мына теңдікті есептеп шығарамыз:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_n.$$

Теңдектен интеграл алсақ 1-ші нүктеден 2 нүктеге орын ауыстыру кезіндегі жұмысты аламыз:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_{(1)}^{(2)} dE_n = -(E_{n2} - E_{n1}), \quad (75)$$

мұнда E_{n1} мен $E_{n2} - E_n$ функциясының 1 және 2 нүктелердегі мәндері.

(71) орнына (75) ескерсек, мынаған ие боламыз:

$$\frac{m_o v_2^2}{2} - \frac{m_o v_1^2}{2} = -(E_{n2} - E_{n1}). \quad (76)$$

Осылайша, 1 және 2 нүктелердің арасындағы кинетикалық энергия E_n шамасы дәл сондай нүктелердің арасында орын ауыстыру кезінде теріс белгімен өзгергеніндей мәнге өзгерді. Теңдікті мынадай түрде қайта жазған ыңғайлы:

$$\frac{m_o v_2^2}{2} + E_{n2} = \frac{m_o v_1^2}{2} + E_{n1}. \quad (77)$$

Бұдан шығатыны, қозғалыс кезіндегі кинетикалық энергия мен E_n шамасының қосындысы тұрақты болып қалады:

$$\frac{m_o v^2}{2} + E_n = \text{const}. \quad (78)$$

E_n шамасы материялы нүктенің **потенциалды энергиясы**, ал теңдік – **энергияның сақталу заңы** деп аталады.

Енді потенциалдық энергияның күшпен байланысын көрсетуге болады. Күшті вектор ретінде жазайық:

$$\vec{F} = \vec{i}_x F_x + \vec{i}_y F_y + \vec{i}_z F_z, \quad (79)$$

мұнда $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$, $\vec{i}_z$ – координаттық осьтер бойындағы бірлік векторлар.

Потенциалды күштің проекцияларын

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}, \quad (80)$$

ескере отырып табатынымыз:

$$\vec{F} = -\vec{i}_x \frac{\partial E_n}{\partial x} - \vec{i}_y \frac{\partial E_n}{\partial y} - \vec{i}_z \frac{\partial E_n}{\partial z}. \quad (81)$$

Набла операторын пайдалансақ $\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$,

біржолата алатынымыз

$$\vec{F} = -\nabla E_n = -\text{grad } E_n. \quad (82)$$

Потенциалды энергияны таңдаудағы еркіндікті пайдалана отырып, оны кеңістіктің қайсыбір нүктесіндегі кез келген алдын ала берілген мәнге тең етіп алуға болады. Сонда барлық қалған нүктелердегі оның мәні сөз жоқ

фиксацияланған болып бекітіледі. Потенциалды энергияға сөзсіздікті берудің бұл процедурасы **нормалау** деп аталады.

Релятивистік жағдайдағы энергияның сақталу заңы:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + E_n = \text{const} . \quad (83)$$

E_n потенциалды энергияның бейрелятивистік теориядағыдай мәні тура сол, ал

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (84)$$

шамасы дененің **толық энергиясы** деп аталады.

Дене тыныштық жағдайында тұрған кезде ($v=0$), ол

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (85)$$

энергиясына ие, ол **тыныштық энергиясы** деп аталады.

Ерікті жылдамдықпен қозғалушы дененің E_k **кинетикалық энергиясы** мына формуламен беріледі:

$$E_k = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) . \quad (86)$$

Релятивистік массаға арналған

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (87)$$

формуланы есте ұстай отырып толық энергияға арналған теңдікті мына түрде жазамыз:

$$E = mc^2 . \quad (88)$$

Бұл теңдік – физиканың ең іргелі заңдарының бірі болып табылады және масса мен энергия арасындағы арақатынасты береді, оны Эйнштейн анықтаған.

Релятивистік импульске арналған

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (89)$$

теңдеуден және толық энергия теңдеуінен

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (90)$$

v жылдамдығын алып тастасақ, p импульс арқылы бөлшектің толық энергиясының бейнесін аламыз:

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} . \quad (91)$$